# MATHESIS

## RECUEIL MATHÉMATIQUE

## A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

### ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE


PUBLIÉ PAR

**P. MANSION** ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences Professeur à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des sciences de Liége, etc.


AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS

*Ut pictura mathesis*
PH. BRETON.


TOME CINQUIÈME

ANNÉE 1885

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1885

# SUR LE SECOND THÉORÈME DE LA MOYENNE,

par M. P. Mansion, avec un Extrait d'une lettre de M. L. Kronecker, professeur à l'Université de Berlin(*).

## I.

Le second théorème de la moyenne est souvent appelé en Allemagne *Du Bois-Reymond's Mittelwerthsatz*, parce que ce géomètre, qui en fait grand usage dans ses recherches sur les séries et les intégrales de Fourier, l'a publié (**) et démontré, le premier, dans toute sa généralité. Il peut s'énoncer ainsi, dans le cas des fonctions habituellement considérées en analyse élémentaire : « *Si* $\mathrm{F}x$ *est une fonction non croissante (c'est-à-dire constante ou décroissante) depuis* $x_0$ *jusqu'à* X, *on a*, moyennant certaines conditions sur lesquelles nous reviendrons plus bas,

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}x\,\varphi x\,dx = \mathrm{F}x_0 \int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\,dx + \mathrm{FX}\int_{x_\mu}^{\mathrm{X}} \varphi x\,dx, \tag{1}$$

$x_\mu$ *étant une valeur convenablement choisie entre* $x_0$ *et* X. »

Voici, dans le cas des fonctions élémentaires, une démonstration de ce théorème(***). On a

$$\mathrm{V} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} (\mathrm{F}x - \mathrm{F}x_0)\varphi x\,dx = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi x\,dx \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}'y\,dy$$

V étant le volume compris entre la surface qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires, $z = \varphi x\,\mathrm{F}'y$, le plan des $xy$, et les trois plans représentés par $x = x_0$, $y = x_0$, $y = x$.

---

(*) Bibliographie : Ossian Bonnet, *Journal de Liouville*, 1849, t. XIV, pp. 249 et suivantes; P. du Boys-Reymond, *Journal de Borchardt*, 1868, t. LXIX, pp. 65 et suivantes; Hankel, *Journal de Schlömilch*, 1869, t. XIV pp. 436 et suivantes; G. F. Meyer, *Mathematische Annalen*, 1873, t. VI, pp. 313-318; puis divers manuels d'analyse infinitésimale, celui de M. Jordan, par exemple, t. II, pp. 89-91, où la démonstration est analogue à celle de M. Kronecker, mais sans les remarques du § II, 3.

(**) Par l'impression, bien entendu; car M. Weierstrass, comme le fait remarquer M. du Bois-Reymond, connaissait le second théorème de la moyenne et l'avait communiqué à ses auditeurs de l'Université de Berlin, avant 1869.

(***) Traduction géométrique de l'une des démonstrations données par M. P. du Bois-Reymond, *Journal de Borchardt*, l. c., p. 82.

On peut exprimer V par une intégrale double où la première intégration se fait par rapport à $x$, la seconde par rapport à $y$. On trouve ainsi :

$$V = \int_{x_0}^{X} F'y\, dy \int_{y}^{X} \varphi x\, dx. \tag{2}$$

L'expression $F'y$ étant la dérivée d'une fonction constante ou décroissante, est toujours négative ou nulle. Donc la dernière intégrale est égale à

$$\int_{x_0}^{X} \mu F'y\, dy = \mu (FX - Fx_0),$$

$\mu$ désignant une valeur intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de

$$\int_{y}^{X} \varphi x\, dx,$$

lorsque $y$ varie depuis $x_0$ jusqu'à X. Cette valeur moyenne peut, en général, être représentée par

$$\int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx,$$

$x_\mu$ étant une valeur de $x$ convenablement choisie. On a donc enfin

$$\int_{x_0}^{X} (Fx - Fx_0)\, \varphi x\, dx = (FX - Fx_0) \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx,$$

ou, après quelques transformations évidentes,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\, \varphi x\, dx = Fx_0 \int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\, dx + FX \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx.$$

Les conditions d'existence de cette formule sont celles qui suffisent pour la légitimité des opérations qui y ont conduit.

Remarques I. Si $x_\nu$ est une valeur de $x$ comprise entre $x_\mu$ et X et telle que

$$FX \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx = Fx_0 \int_{x_\mu}^{x_\nu} \varphi x\, dx,$$

le second théorème de la moyenne devient

$$\int_{x_0}^{X} Fx\, \varphi x\, dx = Fx_0 \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi x\, dx. \tag{3}$$

II. M. P. du Bois-Reymond a fait remarquer(*) que le théorème de la moyenne sous la forme (1) peut se déduire de la formule (3), en remplaçant $Fx$, par $fx - fX$, $fx$ étant une fonction non croissante.

## II.

Ayant communiqué la précédente démonstration à M. L. Kronecker, l'éminent professeur attira notre attention sur la suivante, où il utilise, *d'une manière complète*, la célèbre méthode de transformation des séries, due à Abel(**), en l'appliquant aux intégrales.

1. Par définition

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = \lim_{n=\infty} S_n,$$

si

$$S_n = (x_2 - x_0)Fx_1\varphi x_1 + (x_4 - x_2)Fx_3\varphi x_3 + \cdots + (X - x_{2n-2})Fx_{2n-1}\varphi x_{2n-1},$$

$x_2 - x_0, x_4 - x_2, \ldots, X - x_{2n-2}$ étant $n$ subdivisions égales ou inégales de $X - x_0$, tendant vers zéro avec $n^{-1}$, $x_{2k-1}$ désignant l'une des valeurs de $x$, de $x_{2k-2}$ à $x_{2k}$.

Posons

$$s_k = (x_2 - x_0)\,\varphi x_1 + (x_4 - x_2)\,\varphi x_3 + \cdots + (x_{2k} - x_{2k-2})\,\varphi x_{2k-1},$$

de sorte que

$$(x_{2k} - x_{2k-2})\,\varphi x_{2k-1} = s_k - s_{k-1}.$$

On aura, par la transformation d'Abel,

$$\begin{aligned} S_n &= s_1 Fx_1 + (s_2 - s_1)\,Fx_3 + (s_3 - s_2)\,Fx_5 + \cdots + (s_n - s_{n-1})\,Fx_{2n-1} \\ &= [s_1(Fx_1 - Fx_3) + s_2(Fx_3 - Fx_5) + \cdots + s_{n-1}(Fx_{2n-3} - Fx_{2n-1})] + s_n Fx_{2n-1}, \end{aligned}$$

et, à la limite,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = \lim\,[s_1(Fx_1 - Fx_3) + s_2(Fx_3 - Fx_5) + \cdots \\ + s_{n-1}(Fx_{2n-3} - Fx_{2n-1})] + FX\int_{x_0}^{X}\varphi x\,dx. \end{aligned} \tag{4}$$

---

(*) *Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen; eine Entgegnung*. Tubingen, 1880, p. 59-60.

(**) *Œuvres complètes*, nouvelle édition, 1881, t. I, p. 222. M. Ossian Bonnet n'a utilisé cette transformation que d'une manière incomplète.

Soient $m$, M deux quantités, l'une plus petite, l'autre plus grande, entre lesquelles les sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ sont toujours comprises. On aura

$$\begin{aligned} s_1(\mathrm{F}x_1 - \mathrm{F}x_3) + s_2(\mathrm{F}x_3 - \mathrm{F}x_5) + \cdots + s_{n-1}(\mathrm{F}x_{2n-3} - \mathrm{F}x_{2n-1}) \\ > m[(\mathrm{F}x_1 - \mathrm{F}x_3) + (\mathrm{F}x_3 - \mathrm{F}x_5) + \cdots + (\mathrm{F}x_{2n-3} - \mathrm{F}x_{2n-1})] \end{aligned}$$

ou

$$m(\mathrm{F}x_1 - \mathrm{F}x_{2n-1}),$$

et

$$\begin{aligned} s_1(\mathrm{F}x_1 - \mathrm{F}x_3) + s_2(\mathrm{F}x_3 - \mathrm{F}x_5) + \cdots + s_{n-1}(\mathrm{F}x_{2n-3} - \mathrm{F}x_{2n-1}) \\ < \mathrm{M}(\mathrm{F}x_1 - \mathrm{F}x_{2n-1}). \end{aligned}$$

Donc enfin, en faisant $x_1 = x_0, \quad x_{2n-1} = \mathrm{X}$,

$$m(\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX}) + \mathrm{FX}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx < \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}x\, \varphi x\, dx$$

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}x\, \varphi x\, dx < \mathrm{M}(\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX}) + \mathrm{FX}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx. \tag{5}$$

Ces inégalités ne reposent que sur trois hypothèses, l'une relative à $\mathrm{F}x$, savoir qu'elle n'est pas croissante de $x_0$ à X, l'autre relative aux $s$, qui sont supposés finis; enfin, on admet l'existence des intégrales considérées.

2. Supposons maintenant, de plus, que $m_0$, $\mathrm{M}_0$ soient les valeurs minima et maxima, et réellement atteintes par l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \varphi x\, dx$ lorsque $x$ varie de $x_0$ à X. Il pourra arriver qu'il existe une valeur $x_\mu$ bien déterminée, telle que

$$(\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX})\int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\, dx$$

soit précisément égale à la valeur de

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}x\, \varphi x\, dx - \mathrm{FX}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx,$$

comprise entre $m_0(\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX})$ et $\mathrm{M}_0(\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX})$. Dans ce cas, on pourra écrire

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}x\, \varphi x\, dx - \mathrm{FX}\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi x\, dx = (\mathrm{F}x_0 - \mathrm{FX})\int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\, dx,$$

ou, comme dans le § I,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = Fx_0 \int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\,dx + Fx \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\,dx.$$

3. Mais il importe d'ajouter quelques remarques relativement à ces nouvelles hypothèses, savoir l'existence du minimum $m_0$ et du maximum $M_0$ et celle de la valeur $x_\mu$.

L'analyse précédente du nº 1, donne le théorème de la moyenne sous forme d'inégalités. Pour en tirer le théorème sous forme d'une égalité, il faut y introduire, comme on l'a vu plus haut au nº 2, une certaine *valeur moyenne* $x_\mu$ dont la définition exige plus qu'il n'est nécessaire pour établir ces inégalités. Cependant ces inégalités, qui découlent immédiatement de la transformation d'Abel, *suffisent* pour toutes les applications. On n'a peut-être pas fait assez attention à ces distinctions que nous venons de faire relativement au théorème de M. du Bois-Raymond.

## III.

Ajoutons à ces précieuses observations de M. Kronecker, deux remarques, l'une sur la démonstration du § I comparée à celle du § II, l'autre sur les inégalités dues à M. Ossian Bonnet.

I. Dans le cas des fonctions élémentaires considérées au § I, la formule (4) donne immédiatement la formule (2), en observant que

$$s_k = \int_{x_0}^{x_{2k}} \varphi x dx + \varepsilon, \quad Fx_{2k-1} - Fx_{2k+1} = (x_{2k-1} - x_{2k+1})\,F'(x_{2k} + \varepsilon')$$

$\varepsilon$ et $\varepsilon'$ étant aussi petits que l'on veut. On trouve, en effet, dans cette hypothèse,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = -\int_{x_0}^{X} F'y\,dy \int_{x_0}^{y} \varphi x\,dx + FX \int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx,$$

relation qu'il est aisé de transformer dans la formule (2).

Mais, en passant ainsi des sommes aux intégrales *avant* d'avoir enfermé l'expression étudiée entre deux limites, on voit que l'on est forcé de supposer l'existence de la dérivée $F'y$, ce qui n'a pas lieu dans la démonstration du § II, où l'on passe des intégrales aux sommes *après* avoir assigné des limites à $S_n$.

II. Évidemment, si FX est positif,

$$mFx_0 < m(Fx_0 - FX) + FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\, dx,$$

$$MFx_0 > M(Fx_0 - FX) + FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\, dx;$$

donc, d'après (5)

$$mFx_0 < \int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\, dx < MFx_0, \tag{6}$$

inégalités que l'on renverserait si FX est négatif. M. Ossian Bonnet a eu le mérite de les signaler, le premier, dès 1849, comme une conséquence de la transformation d'Abel appliquée aux intégrales. La démonstration donnée par M. Kronecker prouve que l'on peut déduire de cette transformation des limites plus rapprochées.

Des inégalités (6), on peut déduire l'égalité (3), moyennant les hypothèses qui permettent de tirer (1) de (5); mais de (6) il ne semble pas que l'on puisse tirer (5) par une remarque analogue à celle qui termine le paragraphe premier.

---

## ×UNE ÉQUIVALENCE ALGÉBRIQUE.

Extrait d'une lettre de M. L. Kronecker.

Dans la nouvelle algèbre, dont M. Kronecker a posé les fondements dans ses *Grundzüge einer arithmetischen Theorie des algebraischen Grössen* (Berlin, Reimer, 1882), le problème fondamental à résoudre consiste à représenter toute fonction entière de $x$, sous forme d'un produit de facteurs linéaires, sans définir préalablement les grandeurs algébriques. L'éminent professeur y est parvenu, de la manière la plus simple et la plus complète, dans les leçons qu'il a faites à l'Université de Berlin, pendant le dernier semestre. Voici, par exemple, d'après une lettre de M. Kronecker, l'équivalence algébrique qui remplace la considération de $\sqrt[3]{2}$ :

$$x^3 - 2 = (x - \tfrac{1}{18}z^4)(x + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{36}z^4)(x - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{36}z^4),$$

a un multiple près de $z^6 + 108$.

M. Kronecker va publier les considérations générales dont il a déduit cet exemple.

(P. M.)

---